Cvičení 2. (20.02.)

ORGANIZAČNÍ OKÉNKO „JAK USPOŘÁDAT MENŠÍ REVOLUCI?"

1. PŘEDSTAVENÍ SE; KRISTIÁN VITOVSKÝ → ASTRONOMIE A ASTROFYZIKA → DATOVÁ ANALÝZA → UČENÍ

2. PŘEDSTAVTE SE STUDENTI, KDO A ODKUD.

3. K PRŮBĚHU CVIČENÍ:

   a) CÍL: ABY TO BYL UŽITEČNĚ STRÁVENÝ ČAS.

   TO CHCE ROVNOVÁHU:

   JÁ POČÍTÁM × VY POČÍTÁTE

- KDYŽ TO BUDE MOŽNÉ: VŽDY DÁM PÁR MINUT, ABYSTE SE POKUSILI POČÍTAT SAMI.

  Systém: HOTOVO, POHODA

  ×

  POČÍTÁM, KDYŽTA SI ŘEKNU

  ×

  JE TO ŘÍTI

KDO ZVLÁDÁ: POKUSÍ SE TO VYSVĚTLOVAT OSTATNÍM.

- NÁSLEDNĚ TO VYSVĚTLÍM NA TABULI.

   b) VÍCE-MÉNĚ na začátku cvičení píšeme MINI-TEST (10 min, max. 2 B)

c) Body za aktivitu (4B) ≈ 2x MINITEST

* AKTIVNĚ (KLADNĚ) PŘISPĚJE K PRŮBĚHU CVIK
* AKTIVNĚ POČÍTÁ + POMÁHÁ NA CVIKÁCH DLE SYSTÉMU
* COKOLIV NAVÍC

d) kdo by chtěl druhé kolo... 18:00

④ MATERIÁLY:

* Když budu spokojenej se svou přípravou, tak jí zveřejním na webu

https://kristianvitovsky.github.io/personalweb/ → JSEM TROCHU POZADU: sekce ~~teaching~~ v průběhu týdne

ALE materiálů od ostatních atd. existuje dostatek, inu budu to používat... zkusím shromáždit odkazy.

⑤ !!! KOMUNIKUJTE !!!

krivit97@gmail.com

PŘIPOMÍNKY, NÁPADY, PROSBY – JAKÝKOLIV VYLEPŠOVÁK CVIČENÍ

DOTAZY / KONZULTACE: ONLIN ... až ... pivo

Využijte toho!

JDEME POČÍTAT

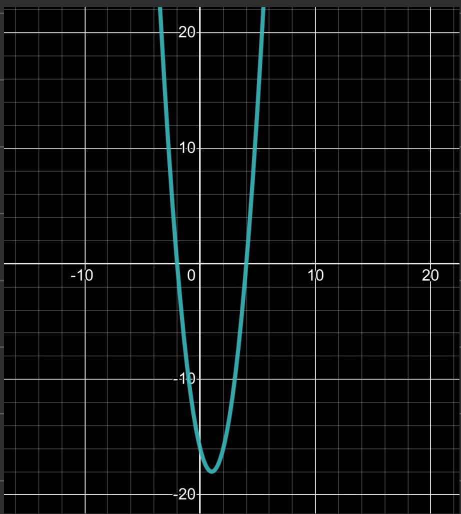
ještě k 1. cvičení... Rychlý příklad na procvičení.

LOŇSKÝ MINI-TEST

? PRŮSEČÍKY S OBĚMA OSAMI
? SOUŘADNICE VRCHOLU
? NAKRESLETE GRAF

$$\boxed{f(x) = 2x^2 - 4x - 16}$$

PRŮSEČÍKY: s osou x: $y = 0 \Rightarrow$



$$0 = 2x^2 - 4x - 16$$

$$0 = 2 \cdot (x^2 - 2x - 8)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{"D"}$$

$$\frac{2 + \sqrt{4 + 32}}{2} = 4$$

$$\frac{2 - \sqrt{\ldots}}{2} = -2$$

$$0 = 2 \cdot (x - 4)(x + 2)$$

$x_1 = 4$

$x_2 = -2$

s osou y: $x = 0 \Rightarrow y = -16$

VRCHOL:

Vyjdeme z předpisu

$$y = ax^2 + bx + c,$$

doplněním na čtverec získáme tvar

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Převedením na společného jmenovatele

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

odečtením $\frac{4ac-b^2}{4a}$ od obou stran získáme

$$y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Což už je téměř tvar, ke kterému se chceme dostat - stačí jen malá úprava

$$y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2.$$

Souřadnice vrcholu paraboly snadno odečteme z poslední rovnice.

$$V = \left[\frac{-b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right],$$

po přepsání do vhodnějšího tvaru.

Souřadnice vrcholu paraboly: $V = \left[-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right].$

$$\Rightarrow V = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{-D}{4a}\right)$$

$$\Rightarrow V = [+1, -18]$$

TEĎ MINI - TEST

ŘEŠENÍ ONLINE (MÁLO ČASU) !

NOVÁ LÁTKA

? DĚLALI JSTE KVADRATICKÉ NEROVNICE ?

KVADRATICKÉ NEROVNICE:

Pr. 1 Riešme nerovnicu

$$2x^2+5x-10 < -x^2-8$$

Ako túto rovnicu riešiť? → Mohli by sme napríklad načrtnúť graf oboch fcií (naľavo aj napravo) a pozrieť sa, kde je ľavá fcia menšia ako pravá.
→ Moc komplikované, radšej si členy dáme na jednu stranu.

$$2x^2+5x-10 < -x^2-8 \quad /+x^2, +8$$

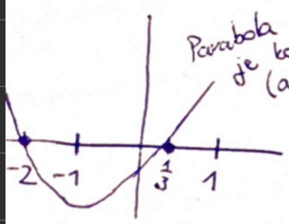
$$3x^2+5x-2 < 0$$ (lepšie sa porovnáva s nulou)

Túto rovnicu môžeme riešiť viacerými spôsobmi, no pri oboch sa oplatí najprv nájsť korene: $D = b^2-4ac = 5^2-4\cdot 3\cdot(-2) = 25+24 = 49$

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} \left\langle \begin{array}{l} \frac{-5+7}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \ (\doteq 0{,}33) \\ \frac{-5-7}{6} = -2 \end{array} \right.$$

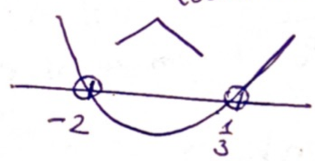
① Spôsob → graficky načrtneme graf fcie $y = 3x^2+5x-2$, pričom presná súradnica vrcholu nehrá úlohu.

Parabola je konvexná ($a>0$)



zjednodušíme ⟹

Prázdne krúžky (ostrá nerovnosť)



⟹ Vidíme, že fcia $y = 3x^2+5x-2$ je menšia ako nula pre $x \in (-2, \frac{1}{3})$ (pozor otvorený interval!)

② Spôsob → tabuľkou (Minule sme mali metóda nulových bodov) si rozložíme výraz a sledujeme, aké má znamienko

$$3x^2+5x-2<0$$
$$3\left(x^2+\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}\right)<0$$
$$3(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)<0$$

NB: $-2, +\frac{1}{3}$

výraz	$(-\infty; 2)$	$(-2, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}, \infty)$
$(x+2)$	−	+	+
$(x-\frac{1}{3})$	−	−	+
$3(x+2)(x-\frac{1}{3})$	+	$\boxed{-}$	+

Využívame, že
$+\cdot+=+$
$+\cdot-=-$
$-\cdot+=-$
$-\cdot-=+$

$\Rightarrow x \in (-2, \frac{1}{3})$

Bonus: Skúste si rozmyslieť ako by vyzeral graf fcie $y = |3x^2+5x-2|$ a ako by sa zmenilo riešenie nerovnice $|3x^2+5x-2| < 0$

Na zamyslenie: Ako by sa zmenilo riešenie ak by sme mali nerovnosť $3x^2+5x-2 \leq 0$?

Úvod do polynomů

Q: Co je to polynom?

Značíme $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, ...

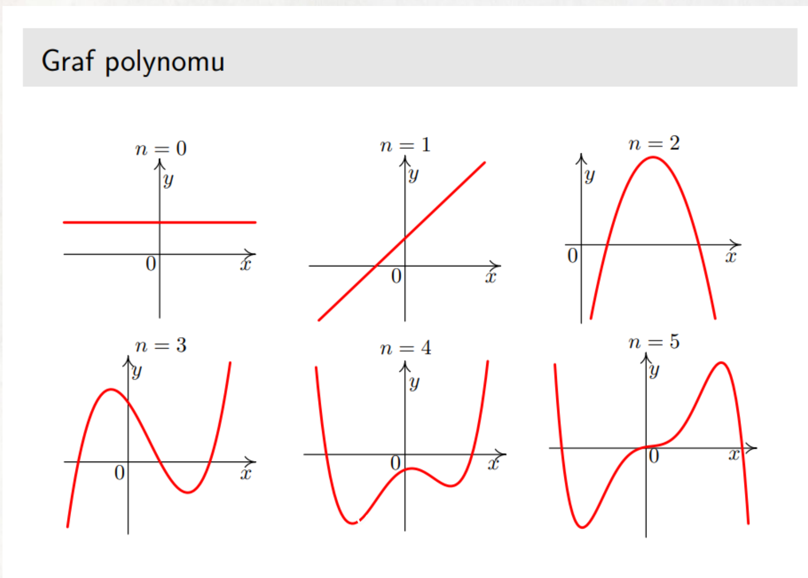
↳ často přidáváme index:

$P_n(x)$ - polynom P stupně n

Pozn.: Základní věta algebry: Polynom stupně n má právě n kořenů (včetně komplexních), k-násobný kořen počítáme jako k kořenů.

Definice:
$$\boxed{P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$$

Příklad základních polynomů:



Kubická funkce/rovnice

- předpis:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Pozn. lze řešit explicitně, tzv. $\boxed{\text{Cardanovy vzorce}}$.
∃ i Vietovy vzorce pro kubické rovnice.

$$\left[\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{d}{a} \end{aligned}\right] \quad (VVZ)$$

Př. Řešte $x^3 - 9x^2 + 8x + 60 = 0$

Často lze (pro jednoduché koeficienty) jeden kořen uhádnout.

Zkusíme $x = -2$:

$$(-2)^3 - 9\cdot(-2)^2 + 8(-2) + 60 = 0 \quad ✓$$

vidíme, že lze přepsat na: $x^3 - 9x^2 + 8x + 60 = (x+2)\,P_2(x)$

polynom 2. řádu (kvadr.)

• Abychom našli $P_2(x)$, musíme kubickou funkci podělit $(x+2)$.

Dělení polynomů

tento algoritmus zapamatovat !

Postup:
1. dělíme prvním členem
2. vynásobím dělitel výsledkem
3. otočím znaménka (resp. odečítám)
4. opakuji dokud je stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele.

výsledek dělení $\frac{x^3}{x}$

krok 1

$(x^3 - 9x^2 + 8x + 60) : (x+2) = \boxed{x^2 - 11x + 30}$

$-(x^3 + 2x^2)$ krok 3 krok 2 vynásobím $x^3 + 2x^2$

ODEČÍTÁM !

$-11x^2 + 8x$ krok 1 ....

$-(-11x^2 - 22x)$

$30x + 60$

$-(30x + 60)$

0

dělení beze zbytku

ZKUSTE DOTÁHNOUT SAMI !

• Tzn. $x^3 - 9x^2 + 8x + 60$ lze rozložit na součin:

$$x^3 - 9x^2 + 8x + 60 = (x+2)(x^2 - 11x + 30)$$

$x^2 - 11x + 30$ rozložíme na kořenové činitele:

kořeny: $x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-120}}{2}$ < 6, 5

$x^2 - 11x + 30 = (x-6)(x-5)$, celkově:

$$\boxed{x^3 - 9x^2 + 8x + 60 = (x+2)(x-6)(x-5)}$$

Kořeny kubické rovnice jsou $x_1 = -2$, $x_2 = 6$, $x_3 = 5$
(a zároveň nulové body)

Q: Co kdybychom řešili nerovnici? $x^3 - 9x^2 + 8x + 60 \le 0$

– řešili bychom tabulkou:

a) b) c) d)

-2 5 6

4 intervaly

$(-\infty,-2)$	$(-2,5)$	$(5,6)$	$(6,+\infty)$	
−	+	+	+	$x+2$
−	−	+	+	$x-6$
−	−	−	+	$x-5$
(−)	(+)	(−)	(+)	Celková signatura

tyhle nás zajímají

Řešení je $x \in (-\infty,-2) \cup (5,6)$.

Z tohoto dělení lze i načrtnout graf kubické funkce. → průsečík s osou y $P_y = [0,60]$

60
40
20
-20
-4
-2
0
2
4
6
8

@100

9. Racionální lomená funkce

9. Racionální lomená funkce

Definice: Nechť P je polynomická funkce n-tého stupně

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

kde $a_n \neq 0, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots a_2, a_1, a_0 \in R$

A nechť Q je polynomická funkce m-tého stupně

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

kde $b_m \neq 0, b_{m-1}, b_{m-2}, \dots b_2, b_1, b_0 \in R$

Racionální lomená funkce R je dána podílem $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

pro všechna x, pro která platí $Q(x) \neq 0$

Poznámka: Přímý předpis pro racionální lomenou funkci vypadá takto:

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

$$a_n \neq 0, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots a_2, a_1, a_0, b_m \neq 0, b_{m-1}, b_{m-2}, \dots b_2, b_1, b_0 \in \mathbf{R}$$

A) **Definiční obor funkce**:
Je třeba vyloučit kořeny polynomické rovnice

$$b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = 0$$

Jejich konkrétní hodnoty nelze obecně určit. Jen víme, že jich je nejvýše m různých (nemusí být žádný).

B) **Symetrie**
Obecně racionální lomená funkce není ani lichá ani sudá ani periodická.

C) **Derivace**
Vypočítáme derivaci podle pravidel v kapitole 2.

D) **Funkční hodnoty - asymptoty**
Racionální lomená funkce má obecně dva druhy asymptot.

Vertikální asymptoty: Všechny body, které musíme vyloučit proto, aby ve jmenovateli nebyla nula (tj. kořeny polynomické rovnice $\mathbf{Q(x) = 0}$), jsou průsečíky asymptot rovnoběžných s osou y. Graf funkce se k těmto asymptotám zleva nebo zprava čím dál tím víc blíží, ale neprotne je.

Šikmé asymptoty: Mohou, ale nemusí být. Závisí to na stupních polynomických funkcí v čitateli a jmenovateli racionální lomené funkce. Viz dále.

E) **Průsečíky se souřadnými osami**

s osou y   Pokud není x = 0 vyloučeno z definičního oboru, pak jde o bod $\mathbf{R(0) = a_0/b_0}$

s osou x   Všechny kořeny polynomické rovnice $\mathbf{P(x) = 0}$, pokud nejsou vyloučeny z definičního oboru.

Úkol: Lineární lomená funkce je zvláštní případ racionální lomené funkce pro případ

n = m = 1
n = m - 1
n = m + 1

Cvičení (3.) [27. 02. 2024]

- ORGANIZAČNÍ: • ROZDAT TESTY A OPĚT VYBRAT
  • VIDÍTE VÝSLEDKY ONLINE?
- OPÁČKO PŘED TESTEM:

Pro zadanou funkci určete její definiční obor, průsečíky s osami, souřadnice středu, napište rovnice obou asymptot a nakreslete graf funkce s vyznačením těchto vypočtených údajů.

$$\boxed{f(x) = \frac{3x+1}{x+2}}$$

ŘEŠENÍ

- $x + 2 \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$
- $x = 0 \Rightarrow y = \frac{3 \cdot 0 + 1}{0 + 2} = \frac{1}{2}$

$P_y = [0; \frac{1}{2}]$

$y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{3x+1}{x+2} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

$P_x = [-\frac{1}{3}; 0]$

- $(3x+1) : x+2 = 3 - \frac{5}{x+2}$
  1) $3x : x = 3$
  2) $3 \cdot (x+2) = 3x + 6$
  3) $3x + 1 - 3x - 6 = -5$
  4) P_n / Q_m; $m > n \Rightarrow$ KONEC

$$\boxed{\begin{aligned} y &= 3 - \frac{5}{x+2} \\ y &= y_s + \frac{k}{x - x_s} \end{aligned}}$$

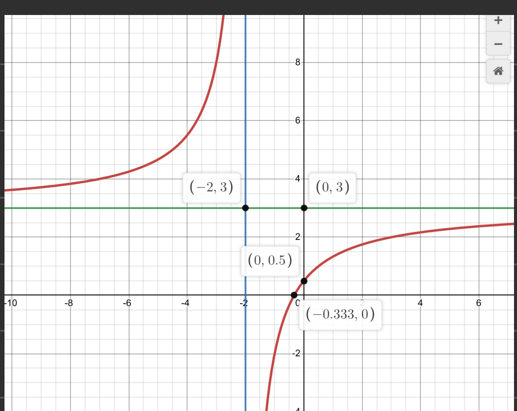
POZN: TOTO ZNAMÉNKO JE TAKOVÉ, ABY X V JMENOVATELI BYLO KLADNÉ.

STŘEDOVÝ TVAR HYPERBOLY

- $k < 0 \Rightarrow$ II. A IV. KVADRANT

$\Rightarrow S = [-2; 3]$

- HA: $y = 3$
  VA: $x = -2$



https://www.desmos.com/calculator/cnlqpmskyo

A JDEME NA TEST...

NOVÁ LÁTKA

CÍLE: x^a, exp, log

MOCNINNÉ FUNKCE

$\boxed{f(x) = x^a}$

a^n a… základ $a \in \mathbb{R}$
n… exponent $n \in \mathbb{N}$

Vztahy:

$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$

$a^{b \cdot c} = (a^b)^c = (a^c)^b$

$a^0 = 1$ pokud $a \neq 0$

$a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Pr: $2^8 = 2^5 \cdot 2^3 = 2^2 \cdot 2^6 = \dots$

Pr: $2^8 = (2^4)^2 = (2^2)^4$

druhá sa nepíše

Pr: $16^{\frac{3}{2}} = \sqrt{16^3} = 64$

párny!

! D_f funkce obsahující odmocninu je dán:

$A^{\frac{1}{B}} = \sqrt[B]{A} \Rightarrow A \geq 0$

HODNĚ PODROBNĚ NA: https://e-learning.vscht.cz/mod/page/view.php?id=6072

DŮLEŽITÉ PŘÍKLADY:

- FUNKCE x^n, KDE n SUDÉ
- x^n n LICHÉ
- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $n > 0$ A LICHÉ
- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $n > 0$ A SUDÉ
- $x^{\frac{1}{B}} = \sqrt[B]{x}$ B SUDÉ
- $x^{\frac{1}{B}}$ B LICHÉ
- POSUNUTÍ …

EXPONENCIÁLNÍ RCE

POZN: OD PROKOPA DEJANA 🔗

ZADÁNÍ

ŘEŠTE ROVNICI

STRATEGIE 1) UPRAVIT NA SPOLEČNÝ ZÁKLAD

2) ROVNAJÍ SE ZÁKLADY

$\Rightarrow$ MUSÍ SE ROVNAT EXPONENTY.

1.) $2^{x-1} \cdot 4 = 8^{2x}$

2.) $\frac{1}{9} 3^{x+4} + 3 \cdot 3^{x} + 3^{x} = 117$

3.) $16^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} = 1$

4.) $\log_2(x+1) - \log_2 x = 1$

5.) $\log(x-1) = 2\log 5 + \log 4$

6.) $3^{x} = 10$

STRATEGIE • UPRAVIT NA STEJNÝ ZÁKLAD nebo ZLOGARITMOVAT.

7.) EKONOMICKÁ APLIKACE

BANKA NABÍZÍ 3% ROČNĚ.

a) KOLIK PENĚZ BUDEME MÍT ZA 10 LET, POKUD NÁŠ POČÁTEČNÍ VKLAD BUDE 50 000 KČ?

b) JAK DLOUHO NEŽ SE KAPITÁL ZDVOJNÁSOBÍ?

GRAFY A PŘÍKLADY

- $2^{x}, 3^{x}, 4^{x} \dots$ 🔗
- $0.1^{x}, 0.01^{x} \dots$ 🔗
- $\log_a x \quad a \in (0,1)$
- $\log_a x \quad a \in (1,\infty)$ 🔗
- VÝJIMEČNÝ ZÁKLAD: $e = 2{,}718\dots$

VŽDY TO MŮŽU PŘEPSAT ($\log_e x = \ln x$)

VÍCE O TOM PROČ JE e SPECIÁLNÍ → https://youtu.be/m2MIpDrF7Es?si=aG94LQOKccDknCGE

$a^{x} = e^{x \ln a}$ 🔗

$f(x) = e^{kx}$ ... pak platí že k je konst. úměry mezi $f(x)$ a mírou změny $f(x)$.

(~~x~~) souvisí s derivacemi

DEFINIČNÍ OBORY FCÍ

POZN: OD PROKOPA DEJANA

ZADÁNÍ

1.) $y = \log \frac{3-x}{x^2-16} + e^{2x}$

2.) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2-6x+9}}{x-2}$